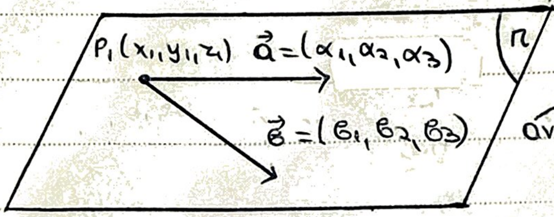
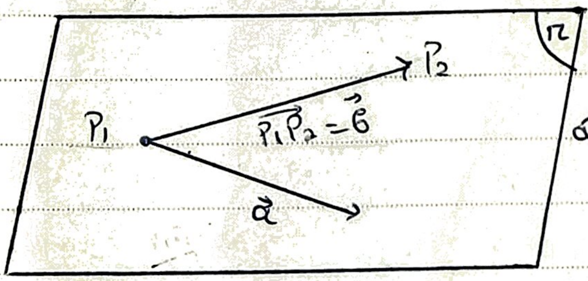
Μαθημα 11ο

29/3/2016

Αναλυτικη Γεωμετρια



$\xrightarrow{\text{αναλυτικη}}$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0$



$\xrightarrow{\text{αναλυτικη}}$ $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}=0$

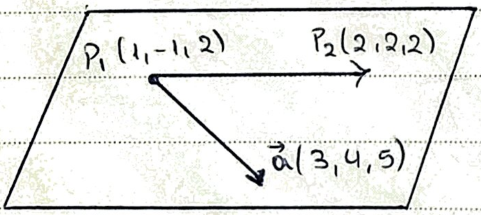
$\to P_1$

$\to a$

$\to P_1P_2=b$

Παραδειγμα

Να βρεθει η αναλυτικη εξισωση επιπεδου που διερχεται απο τα $P_1(1,-1,2)$ και $P_2(2,2,2)$ και ειναι παραλληλο προς το διανυσμα $\vec{a}=(3,4,5)$



$\vec{P_1P_2}=(2-1,\ 2-(-1),\ 2-2)=(1,3,0)$

$\vec{a}=(3,4,5)$

Τα $\vec{P_1P_2}$ και $\vec{a}$ ειναι γραμμικα ανεξαρτητα

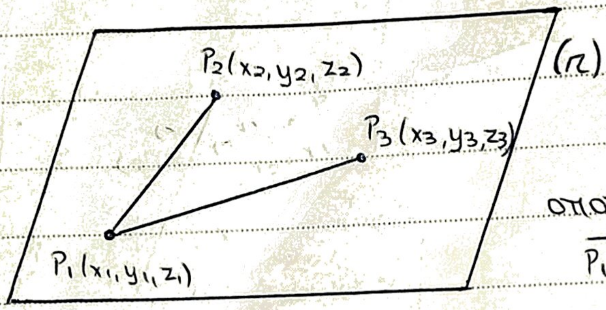
1ος τροπος: $\lambda(1,3,0)+\mu(3,4,5)=\vec{0} \Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda=\mu=0$

Οποτε η αναλυτικη εξισωση του επιπεδου (π) ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0 \xRightarrow{\text{πραξεις}} 3x-y-z-2=0$$

(iii) περιγραφη επιπεδου αν γνωριζουμε 3 (μη συνευθειακα) σημεια του.

Γιο να μπορω να ορισω τα διανυσματα $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$



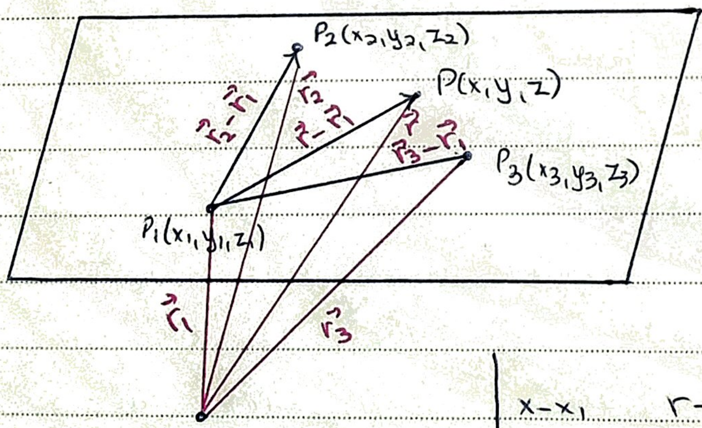
Θεωρω το $P_1(x_1,y_1,z_1)$ και $P_2(x_2,y_2,z_2)$ γνωστα οποτε ειναι γνωστα και τα $\overrightarrow{P_1P_2}$ και $\overrightarrow{P_1P_3}$

$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$

Η αναλυτικη εξισωση του επιπεδου (π) θα ειναι:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$



$$\begin{vmatrix} x-x_1 & r-r_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & r_2-r_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & r_3-r_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

2η ερμηνεια οριζουσας

Διανυσματικη εξισωση του επιπεδου (π)

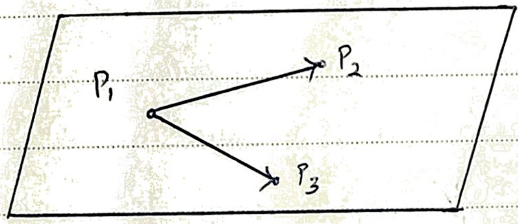
$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) + \mu(\vec{r}_3 - \vec{r}_1)$$

Τα $(\vec{r}-\vec{r}_1)$, $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$, $(\vec{r}_3-\vec{r}_1)$ ειναι συνεπιπεδα

$\Leftrightarrow$ μεικτο γινομενο μηδεν $\Leftrightarrow$ $(\vec{r}-\vec{r}_1, \vec{r}_2-\vec{r}_1, \vec{r}_3-\vec{r}_1) = 0 \Leftrightarrow (*)$

Παραδειγμα

Να βρεθει η εξισωση του (π) που διερχεται απο τα $P_1(1,2,-1)$, $P_2(3,4,5)$, $P_3(2,3,1)$



(*) Επιλεγω εγω το αρχικο μου σημειο πιο θα ειναι (τυχαια) και δημιουργω τα αλλα διανυσματα

$\overrightarrow{P_1P_2} = (3-1, 4-2, 5-(-1)) = (2,2,6)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (2-1, 3-2, 1-(-1)) = (1,1,2)$

Τα διανυσματα $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ ειναι Γραμ. Ανεξ αφου υπαρχει μια οριζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ αρα $r(A) = 2$

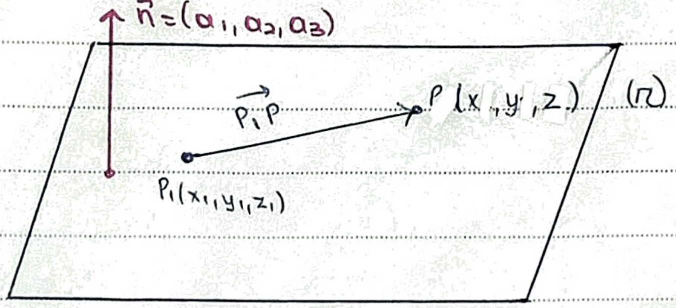
Οποτε η εξισωση του επιπεδου (π) ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-(-1) \\ 2 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

Ορισμος:

Ενα διανυσμα $\vec{a}$ λεμε οτι ειναι καθετο στο επιπεδο (π), αν ειναι καθετο σε καθε διανυσμα του επιπεδου.

(ii) Επιπεδο οριζομενο απο σημειο και διανυσμα καθετο σε αυτο



$\vec{P_1P} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$

αφου $\vec{n} \perp (\pi) \overset{op}{\iff} \vec{n} \perp (\vec{P_1P}) \overset{op}{\iff} \boxed{\vec{n}\cdot\vec{P_1P}=0}$

διανυσματικη εξισωση επιπεδου (π) απο σημειο ∈ (π) και διανυσμα καθετο στο (π)

Αν $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P(x,y,z)$ και $\vec{n}=(a_1,a_2,a_3)$

$\vec{n}\cdot\vec{P_1P}=0 \Rightarrow (a_1,a_2,a_3)(x-x_1,y-y_1,z-z_1)=0 \Rightarrow$

$(x-x_1)a_1+(y-y_1)a_2+(z-z_1)\cdot a_3=0$ (*) Αναλυτικη Εξισωση του επιπεδου (π)

Παραδειγμα

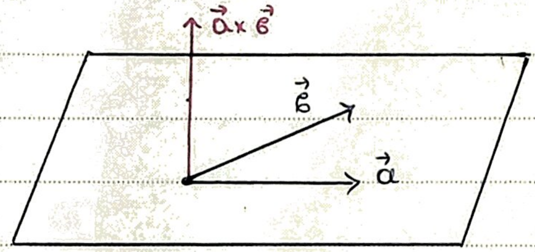
Να βρεθει το (π) αν ενα σημειο του ειναι $P_1(1,2,-3)$ και το $\vec{n} \perp (\pi)$ ειναι το $\vec{n}=(4,5,6)$

Αντικαθιστωντας στην (*) $\Rightarrow (x-1)\cdot 4+(y-2)\cdot 5+(z+3)\cdot 6=0$

$\Rightarrow 4x+5y+6z+4=0$

Παρατηρήσεις

(1) Έστω επίπεδο (π), $\vec{a}, \vec{b}$ παράλληλα στο (π) (μη συγγραμμικά δηλ. γραμ. ανεξ.), γνωρίζουμε διάνυσμα κάθετο στο (π) $\vec{a} \times \vec{b}$



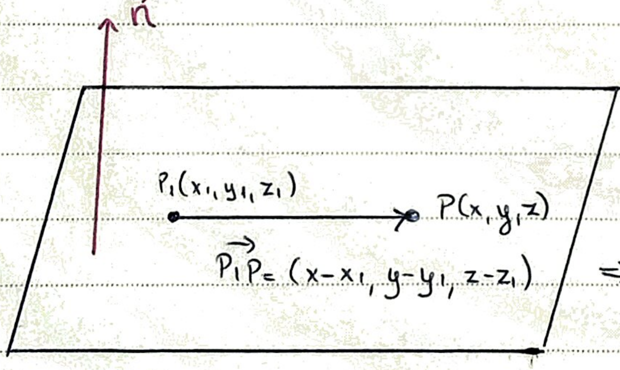
Προφανώς

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a} \\ \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b} \end{array}\right\} \vec{a} \times \vec{b} \perp \underbrace{\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}}_{\text{το οποίο παράγουν}}$$

(2) Έστω επίπεδο (π) με αναλυτική εξίσωση $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ (1)

όπου $(A, B, \Gamma) \neq (0,0,0)$

προσδιορισμός διανύσματος κάθετο στο (π)



Έστω P_1 σημείο του επιπέδου (π) (x_1, y_1, z_1)

$\Rightarrow Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta = 0$ (2)

$(1) - (2) \Rightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) + \Gamma(z - z_1) = 0 \iff$

$$(A, B, \Gamma) \cdot (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = 0 \iff \underbrace{(A, B, \Gamma)}_{\text{διάνυσμα}} \cdot \underbrace{\vec{P_1P}}_{\text{τυχαίο διάνυσμα του } (\pi)} = 0$$

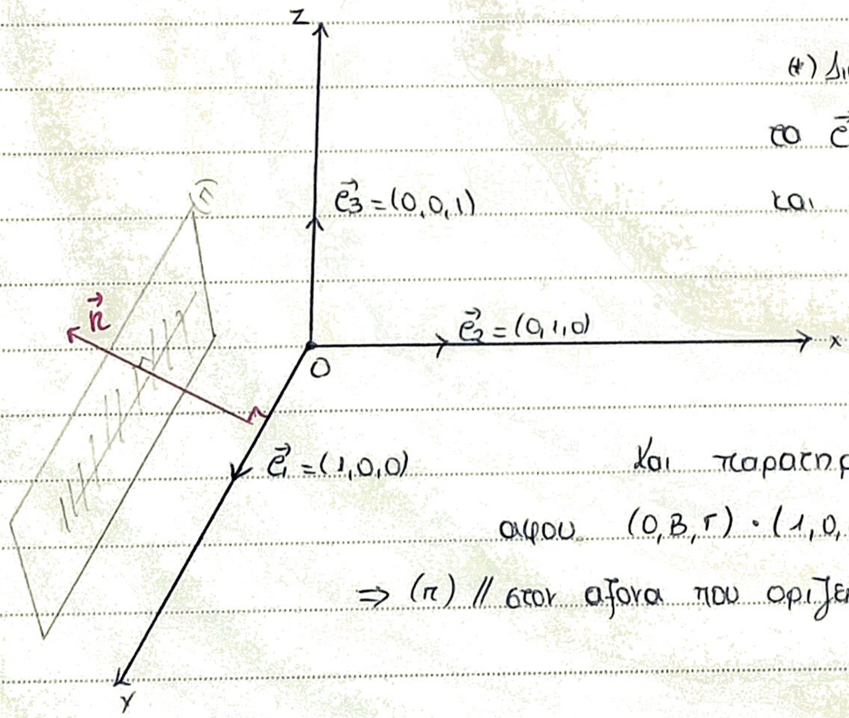
$\iff$ Το διάνυσμα $(A, B, \Gamma) = \vec{n}$ είναι κάθετο στο τυχαίο $\vec{P_1P}$ $\iff$ κάθετο σε κάθε διάνυσμα του (π) $\overset{\text{ορ.}}{\iff}$ κάθετο στο (π)

Συνεπώς για επίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ το διάνυσμα
$\vec{n}=(A,B,\Gamma)\perp(\pi)$ όπου $(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$

! Αν μου ζητούσε μοναδιαίο κάθετο
$$\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(A,B,\Gamma)}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

(3) Αν $\Delta=0$ στην $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ $\Rightarrow$ το επίπεδο (π) διέρχεται από την αρχή των αξόνων (αφού το $(0,0,0)$ επαληθεύει το (π))

(4) Έστω επίπεδο (π) $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ $((A,B,\Gamma)\neq(0,0,0))$
Τι συμπέρασμα εξάγουμε για το (π), αν π.χ $A=0$;

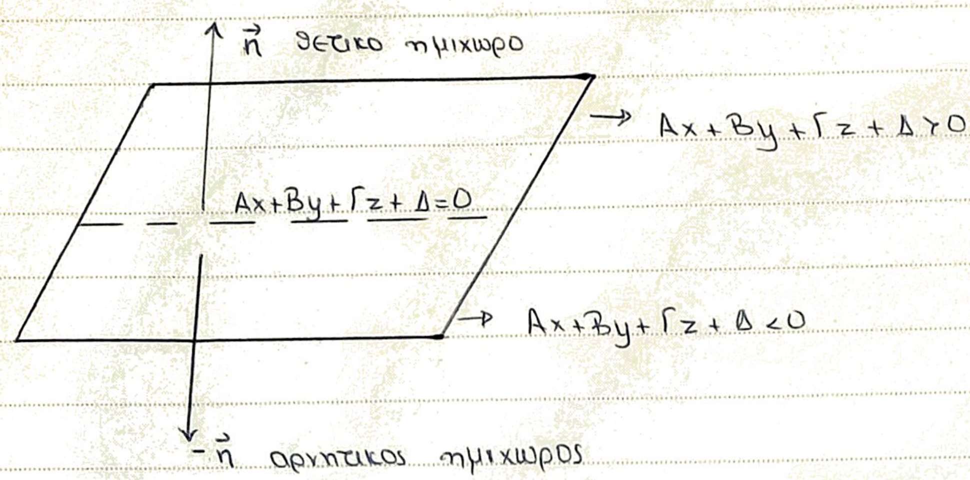


(*) διανύσματα θέσης είναι τα $\vec{e_1}=(1,0,0)$, $\vec{e_2}=(0,1,0)$ και $\vec{e_3}=(0,0,1)$

Και παρατηρούμε ότι $\vec{n}\perp\vec{e_1}$
αφού $(0,B,\Gamma)\cdot(1,0,0)=0$
$\Rightarrow$ (π) // στον άξονα που ορίζει το $\vec{e_1}$ δηλ. τον Ox

Αν $A=0$ $\Rightarrow$ $\vec{n}=(0,B,\Gamma)\perp(\pi)$

(5)



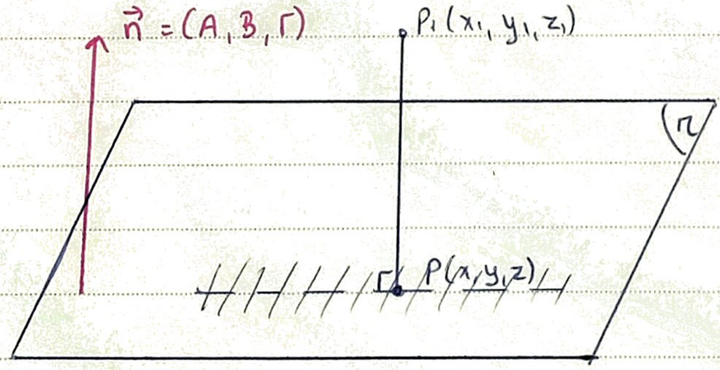
Ενα καθετο διανυσμα στο επιπεδο (π) το χωριζει το επιπεδο (π) σε δυο ημιχωρους τον θετικο και τον αρνητικο

(*) Αποσταση σημειου απο επιπεδο

Θεωρημα

Εστω $(\pi): Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ και εστω σημειο $P_1(x_1,y_1,z_1)$ που δεν ανηκει στο επιπεδο (π) $\Rightarrow$ Ισχυει $d(P_1,\pi)=\dfrac{|Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$

αποσταση



(*) συγγραμικο
$\Rightarrow$ Γ.Ε

Εστω $P_0(x_0,y_0,z_0)$ προβολη του P_1 στο (π)

$d(P_1,\pi)=|\overrightarrow{P_0P_1}|$

$P_0\in(\pi)\Rightarrow Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta=0 \Rightarrow -\Delta=Ax_0+By_0+\Gamma z_0$ (1)

$\left.\begin{array}{l}\vec{n}\perp(\pi)\\ \overrightarrow{P_0P_1}\perp(\pi)\end{array}\right\}$ $\vec{n},\overrightarrow{P_0P_1}$ συγγραμ. $\Rightarrow$ η γωνια τους ειναι 0 ή π $\Rightarrow \cos(\vec{n},\overrightarrow{P_0P_1})=\pm1 \Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P_1}=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{P_0P_1}|\cdot\cos(\vec{n},\overrightarrow{P_0P_1})=$

$=|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{P_0P_1}|\cdot(\pm1)$ (*)

Βάζω μέτρα στο (*) $\Rightarrow |\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}| = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{P_0P_1}| \Rightarrow$

$$d(P_1, \pi) = |P_0P_1| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{|\vec{n}|} = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1}|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = (A, B, \Gamma) \\ \overrightarrow{P_0P_1} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0) \end{array}\right\} \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + \Gamma(z_1 - z_0) =$$

$$= Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 - (Ax_0 + Bx_0 - \Gamma z_0) \stackrel{1}{=}$$

$$= Ax_1 + By_1 + \Gamma z_1 + \Delta \quad (*)$$

Στην (*) με μέτρο έχω το ζητούμενο